

Calculus sample problems III for final test in Fall Semester

1. 令 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 2, & x \in R \setminus Q \end{cases}$, 求上積分(upper integral) $\int_a^b f$ 及下積分(lower integral) $\int_a^b \overline{f}$.
2. 設 $f(x) = \int_x^{x^2} \sin^6 t \, dt$, 求 $f'(x)$.
3. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx =$
4. 若 $f(x) = [x]$ = 小於或等於 x 之最大整數, 使用上和(upper sum)及下和(lower sum)之定義求 $\int_1^2 f$ and $\int_1^2 \overline{f}$.
5. $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx =$
6. $\int (\sin^2 2x) dx =$
7. 若 $f(x) = x^2 + 1$, 求一數 $c \in (1,3)$ 使得 $\int_1^3 f(x) dx = f(c)(3-1)$.
8. (i) 證明 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (ii) 使用黎曼和(Riemann sum)數列之極限求 $\int_0^1 x^2 dx$.
9. 求通過 $(4,2), (1,-1)$ 之直線與拋物線 $x = y^2$ 所圍區域之面積.
10. 二個半徑為 r 的直圓柱正交, 求交集之體積.
11. 求圓區域 $(x-3)^2 + y^2 \leq 1$ 繞 y 軸所生成立體(甜甜圈)之體積.
12. 求圖形 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 之弧長.
13. 證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.
14. 已知 $Dx^x = x^x(1 + \ln x)$, 求 $\frac{d}{dx} (\sin x)^{\sin x}$.
15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx =$