

Calculus sample problems I for midterm test in Fall Semester

1. 給定 $\varepsilon > 0$, 試求 $\delta > 0$ 使得若 $0 < |x - 2| < \delta$. 則 $|3x - 6| < \varepsilon$.

2. 設 $f(x) = [x]$, $[x]$ 為不大於 x 之最大整數. 試求 $f(-1)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$

4. 設 $f(x) = |x|$, 試證明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處不可微分.

5. 設 $f(x) = \frac{1}{x}$, 試證明 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

6. 試求 $D \sin(\sin(\sin x))$.

7. 設 $f(x) = x + \sin^2(2x)$, 試求 $f'(x)$.

提示: (i) $D \sin^2(2x) = 2 \sin(2x) D \sin(2x)$, (ii) $(2x)' = 2$

8. 試求 c 之值, 使得函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 處連續.

9. 設 $f(x) = \sqrt{x}$, 試求 c 之值, $1 < c < 4$, 使得 $f(4) - f(1) = (4 - 1)f'(c)$.

$$\text{提示: } \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

10. 試求圖形 $y = x^3$ 上, 通過點 $(2, 8)$ 之切線方程式.

11. 試證明 $\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$.

12. 設 $x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$, 試求 $x^2 y$ 之最大值.

13. 試繪函數圖形 $y = x(x - 4)^3$. (需標示反曲點, 相對極大點, 相對極小點.)

14. 設 x, θ 皆為 t 之函數, 若 $x = 2 \tan \theta$, 且當 t 為任何值時, $\frac{d\theta}{dt} = 1$, 試求當 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\text{時, } \frac{dx}{dt} = ?$$

提示: (i) $x = 2 \tan \theta$ 等號兩邊對 t 微分 (求瞬間變化率). (ii) $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

15. 試求內接於半徑為 r 之球的最大直圓錐 (right circular cone) 體積.